Funções

Alessandro Takeshi Morita Gagliardi

28 de julho de 2011

1 O que é, e para que serve, uma função?

O conceito de função é um dos mais importantes em toda a Matemática. Em particular, o Cálculo se encarrega de estudar atentamente todos os tipos de funções e trabalhar suas propriedades, usando conceitos já adquiridos no Ensino Médio e vários outros novos. Contudo, é importante entender, em primeiro lugar, o que *é* uma função, antes de passarmos a suas minúcias. Em segundo lugar, e tão importante quanto, é entender *para que* elas servem.

Para explicar a utilidade de uma função, entenda-se em primeiro lugar que, para descrever e calcular *todos* os fenômenos de nosso mundo, utilizamos funções. Sejam fenômenos físicos, químicos ou biológicos, seja na engenharia ou na medicina, e mesmo nas ciências sociais e economia, o comportamento dos sistemas sempre pode (pelo menos, até certa medida) ser representado por funções. E, como a teoria das funções é extremamente sólida e vem sendo desenvolvida por séculos, uma vez que um sistema tenha funções que o representem, a quantidade de informação que pode ser extraída desta representação é enorme.

É, portanto, de vital importância que um aluno de ciências, especialmente ciências exatas, tenha uma compreensão total e um domínio fluente da teoria de funções. Isso se adquire com o tempo; esperamos que essa introdução ajude a começar este caminho de maneira agradável.

Um aluno recém-entrado na universidade com uma base razoável em Matemática deve se lembrar, mesmo que vagamente, de termos como *domínio*, *imagem*, funções *injetoras*, *sobrejetoras*, enfim, um amplo conjunto de termos cuja funcionalidade não é sempre imediatamente compreendida pelo estudante. Em nosso curso, veremos que esses conceitos são fundamentais para uma compreensão total das funções, mas os reintroduziremos aos poucos. Portanto, mesmo que você não se recorde completamente desses conceitos, não se preocupe; nós os estudaremos extensamente de agora em diante.

Antes de entrarmos nestes conceitos, entendamos o que constituem as funções. Um exemplo extremamente simples, porém que expressa de modo claro sua natureza, é o seguinte: imagine que você tenha uma simples máquina de sucos, daquelas com uma entrada para frutas e um liquidificador dentro, e uma saída para o suco. Para cada fruta que é colocada na máquina, um certo tipo de suco sairá dela; se você puser morangos, terá suco de morango; se forem abacaxis, sairá suco de abacaxi, e assim por diante.

Uma função é, essencialmente falando, essa máquina de sucos: um mecanismo que *recebe* um objeto (no caso, as frutas) e *devolve* um outro (os respectivos sucos). Introduzindo a notação matemática, dizemos que uma função f recebe uma certa quantidade x e, após algumas operações, retorna outra, que denotamos por $f(x)$. Lembramos que $f(x)$ não quer dizer o produto de f por x.

Há, ainda, mais um fato crucial para a compreensão total da idéia de função. Naturalmente, nossa máquina de sucos tem certas limitações. Se colocarmos laranjas nela, esperamos que ela *somente* retorne suco de laranja. Não seria razoável que pusésseos laranjas e ela retornasse suco de laranja *ou* suco de maçã. Ela deve retornar apenas um único, mesmo valor, para cada entrada. Essa noção de correspondência única de cada x para o respectivo $f(x)$ é o que diferencia funções de outros tipos de relações, como veremos mais para frente. Segue que uma função, *para* *cada argumento recebido, retorna um e apenas um valor.* Isso é extremamente importante. Um exemplo simples é a função

$$f(x) = 3x + 2.$$

Para cada x, existe apenas um único $3x + 2$. Por exemplo $f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$ e $f(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11$; são resultados únicos.

Podemos então definir, com base no visto até agora, uma função. Chamando-a de f, por exemplo, temos que f é uma *regra* que associa, a cada entrada x, uma única saída $f(x)$. Embora possa parecer pouco rigoroso, a sentença anterior é suficiente como definição de função para quase qualquer caso. Veremos mais adiante uma definição mais formal que esta, mas nem por isso conceitualmente diferente da que acabamos de ver.

Note que, nesta definição, nenhuma vez a palavra *número* foi utilizada; no exemplo da função $f(x) = 3x + 2$ dado anteriormente, naturalmente, o leitor subentendeu que x era um número. Na verdade, uma função não precisa necessariamente receber, ou devolver, um número; nem tampouco precisa receber e devolver objetos de mesma natureza. O conceito de função se aplica aos mais diversos entes matemáticos, dentre os quais constam vetores, matrizes, entre outros - incluindo até mesmpo funções que recebem outras funções. Não cabe a um curso introdutório de Cálculo utilizar essas estruturas, portanto não é necessário que o leitor se assuste com essa constatação. Apenas deseja-se salientar que a idéia de função é absolutamente abrangente, nas mais diversas áreas da Matemática - e por isso, sua compreensão é fundamental para qualquer estudo posterior.

Por último, é necessário enfatizar que, num curso de Cálculo I, estudamos apenas *funções de uma variável a valores reais*, também chamadas simplesmente de *funções reais*. Ou seja, estudamos funções que recebem um único número e retornam outro número. Isso é um caso bastante particular das funções a serem estudadas num curso completo de Cálculo, mas que se bem compreendido, pode ser generalizado facilmente para estruturas mais complexas. Daqui em diante, que fique subentendido que, a não ser que evidenciado o contrário, sempre que nos referirmos a funções sem mais especificações, estas serão funções reais.

2 Domínio, contradomínio e imagem

Entramos agora em tópicos mais aprofundados sobre funções. Voltemos ao exemplo da máquina de sucos.

Em primeiro lugar, nossa máquina deve receber apenas frutas; não podemos colocar pedras e esperar que saia suco de pedra, e daí em diante. Isso significa que existe um conjunto limitado de objetos que podem ser inseridos em nossa máquina; analogamente, para uma função deve haver um conjunto definido de objetos que ela possa receber, de maneira que ela "funcione". A esse conjunto denominamos o **domínio** da função.

O domínio de uma função é algo, a princípio, condicionado pelo problema que está sendo resolvido. Por exemplo, consideremos um problema de Física na qual nossa função receba valores de temperatura em escala Kelvin, ou seja, com temperaturas maiores ou iguais a 0. Significa que se chegarmos a uma função que receba a temperatura de um corpo, essa função obrigatoriamente tem de ter domínio contido positivo, ou seja, entre 0 e infinito excluindo estes dois valores (em notação, $(0, \infty)$). Note que, na frase anterior, escrevemos *contido*; pode ser que nossa domínio, devido às condições do problema, não seja qualquer temperatura positiva, mas um conjunto mais restrito. Por exemplo, se estivermos lidando com água líquida, então é evidente que nosso domínio de temperaturas é entre 273 e 373[1]. Podemos perceber, portanto, que o domínio, até certo ponto, é algo a ser decidido por quem estiver trabalhando com a função.

Estudemos um exemplo. A função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

[1]Lembrando que 273 K equivale a 0°C e 373 K equivale a 100°C.

é evidentemente definida para todos os números reais, exceto o 0, que denotamos geralmente por $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Este é o maior domínio possível para esta função. Claramente, se for de nosso interesse, qualquer subconjunto desse intervalo acima servirá como domínio também. De novo, se estivermos trabalhando com temperaturas, por exemplo, podemos definir o domínio como $\mathbb{R}^*_+$ (ou seja, os reais não-nulos positivos).

Tendo definido o domínio de uma função, podemos passar a outros conceitos. É também evidente que esperamos que a máquina de sucos retorne *apenas* sucos. Se colocarmos um elemento do domínio como argumento da função, esperamos que ela se comporte "bem" e retorne o respectivo suco. Ela não pode retornar coisas absurdas, como lâmpadas, por exemplo[2]. Segue que existe um outro conjunto, além do domínio, desta vez relativo aos valores que a função pode assumir. Chamamos esse conjunto de **contradomínio**, definido como o conjunto de valores aos quais nossa função está restrita - no caso, o contradomínio é constituído por todos os sucos de fruta. É importante ressaltar que o domínio se refere aos valores que a função *recebe*, ao passo que o contradomínio se refere aos valores que a função *devolve*. Por exemplo, uma função como

$$f(x) = x^2$$

com domínio sendo todos os números reais tem contradomínio como sendo todos os números reais. Ela está "restrita" aos números reais, independentemente do valor de x que ela receba.

Mas isso não significa que a função retorne *todos* os valores do contradomínio. No exemplo acima, a função $f(x) = x^2$ retorna apenas valores positivos ou nulos. No exemplo da máquina de sucos, se as únicas frutas disponíveis fossem uvas, maracujás e maçãs (ou seja, se estes 3 tipos de frutas fossem nosso domínio), então poderíamos obter apenas 3 tipos de suco - suco de uva, maracujá ou maçã. Existe então um segundo e último conjunto referente aos valores que a função pode assumir, que chamamos de **imagem**. A imagem é o conjunto de todos os $f(x)$ tais que x está no domínio. Ou seja, a imagem é o conjunto de todos os valores os quais a função efetivamente assume, dentre os valores que ela possivelmente poderia assumir.

Podemos então resumir essas definições como a seguir. Seja f uma função. Então, definimos

- **Domínio**: conjunto de todos os x para os quais f está definida. Às vezes é denotado por Df ou $\operatorname{Dom} f$.
- **Imagem**: conjunto de todos os valores $f(x)$ assumidos pela função, quando se percorrem todos os valores x do domínio. Às vezes é representada por $\operatorname{Im} f$. Se a função tiver como domínio o conjunto X, podemos representar a imagem, por abuso de notação, como $f(X)$.
- **Contradomínio**: conjunto de todos os valores possíveis para $f(x)$ existir.

Se X é o domínio de uma função e Y é seu contradomínio, é costumeiro denotar a função como $f : X \to Y$, e podemos dizer que "f é uma função de X em Y", "f mapeia X em Y", entre outras leituras.

O estudante naturalmente pode ficar com a dúvida: qual é a utilidade do contradomínio, se a função efetivamente só retorna valores na imagem? Essa questão é pertinente, mas a resposta depende na verdade do modo como a função é usada. Por exemplo, podemos precisar resolver um problema sobre uma função genérica, com a condição de que tanto seu domínio quanto seu contradomínio sejam reais (denotamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), e nenhuma informação sobre a imagem. Muitas vezes é suficiente para nós essa informação, como será feito exaustivamente daqui em diante. Podemos manipular muitas propriedades das funções sem saber explicitamente sobre a imagem, mas sabendo que ela se restringe a valores reais (e não complexos, por exemplo)[3].

[2]Que o autor seja perdoado pelos exemplos, por vezes, ridículos.

[3]Em vários enunciados e teoremas daqui para a frente, diremos "seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$." Com isso, queremos dizer "considere uma função f que recebe argumento real e retorna um outro valor real". Não nos importa se estes valores são positivos, nulos, racionais ou irracionais; é suficiente saber que são reais.

Mesmo que agora essa diferença entre contradomínio e imagem não seja imediatamente clara, não é necessário se preocupar com ela a curto prazo. Usaremos ela em breve para definir o conceito de sobrejetividade, mas em outros casos não essa diferença não será tão relevante; esperamos que o estudante se acostume gradualmente a ela.

Podemos, então, dar a seguinte definição de função, que embora não totalmente rigorosa, é suficiente para nosso estudo introdutório do Cálculo:

Definição 1. *Sejam X e Y subconjuntos dos números reais. Uma* ***função de uma variável real a valores reais****, ou simplesmente* ***função real****, é uma regra f, denotada $f : X \to Y$, que relaciona cada $x \in X$ a um e apenas um $y \in Y$; denotamos esta última relação como $y = f(x)$.*

Nessas condições, X é dito o ***domínio*** *de f e Y é dito seu contradomínio; a* ***imagem*** *de f é o subconjunto de Y que contenha todos os y tais que $y = f(x)$, para todo $x \in X$.*

3 Representação gráfica de funções

Muitos alunos de Ensino Médio, ao serem perguntados "o que é uma função?", respondem quase imediatamente que "uma função é um gráfico". Essa resposta não é completamente equivocada, mas também não pode ser dita como totalmente correta.

A parte correta desta resposta vem do fato de que as funções de uma variável real a um valor real sempre podem ser representadas por um gráfico no plano Cartesiano. Isso é um fato tão importante, e que facilita tanto a compreensão das funções, que muitos estudantes tendem a unificar as duas idéias - esta é a parte errada. A definição de função é como acabamos de escrever; sua representação gráfica será introduzida agora, e ela nos permite visualizar mais facilmente os conceitos já apresentados, além dos que estão por vir.

Em primeiro lugar, vamos constuir o plano Cartesiano como já estudado no Ensino Médio. Para tal fim, precisamos definir um ponto de origem, a que chamaremos de O; um eixo primeiro, a que chamaremos de Ox, orientado da esquerda para a direita. Esse eixo será nossa "régua" na direção horizontal, de modo que a cada ponto desta reta será identificado com um número real - desse modo, o eixo Ox representa $\mathbb{R}$. Por conveniência, fazemos com que sua intersecção com O seja identificada com o valor $x = 0$. Fazemos também um outro eixo perpedicular a Ox, a que chamaremos Oy, e cuja intersecção com Ox se dá em O, para o qual $y = 0$, e que também representa $\mathbb{R}$. Temos assim o plano Cartesiano padrão, como pode ser visto na figura abaixo. Dado o sistema de eixos ortogonal, cada ponto deste plano pode ser dado por um par ordenado (x, y) único. Observamos que qualquer dupla de números reais pode ser dada por essa construção.

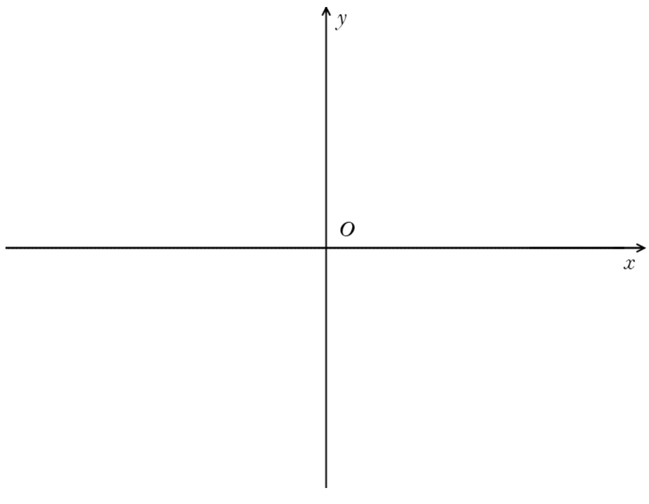

Figura 1: Plano Cartesiano

Podemos denotar o plano Cartesiano facilmente, lembrando o conceito de *produto Cartesiano* entre dois conjuntos A e B. Denotamos este produto como $A \times B$, e o definimos como o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$. O plano Cartesiano pode ser, então, visto como o produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com $\mathbb{R}$; assim, costuma-se denotá-lo por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou, por abuso de notação, como $\mathbb{R}^2$.

Nós podemos pensar em representar funções no $\mathbb{R}^2$ simplesmente porque as funções que nós usamos recebem e devolvem argumentos reais - quaisquer outros tipos de argumento precisariam de outros tipos de representação gráfica. Assim, se uma função recebe um certo $x \in \mathbb{R}$, ela devolve um outro $f(x) \in \mathbb{R}$; identificando esse x como um ponto no eixo Ox (a que chamaremos, por convenção, de eixo das abscissas) e seu correspondente $f(x)$ como um valor no eixo Oy (a que chamaremos de eixo das ordenadas), então o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ com x no domínio de f representará graficamente a função no plano Cartesiano. Podemos definir o **gráfico** de uma função f como

$$\text{gráfico de } f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | \forall x \in \text{Dom}\, f\},$$

onde lembramos que o símbolo := quer dizer "é definido por". Em português, a expressão acima é lida como "o gráfico de f é o conjunto dos pontos $(x, f(x))$ do plano Cartesiano, para todo x que esteja no domínio da função".

Abaixo temos os já conhecidos gráficos de funções polinomiais de primeiro e segundo grau (i.e. retas e parábolas).

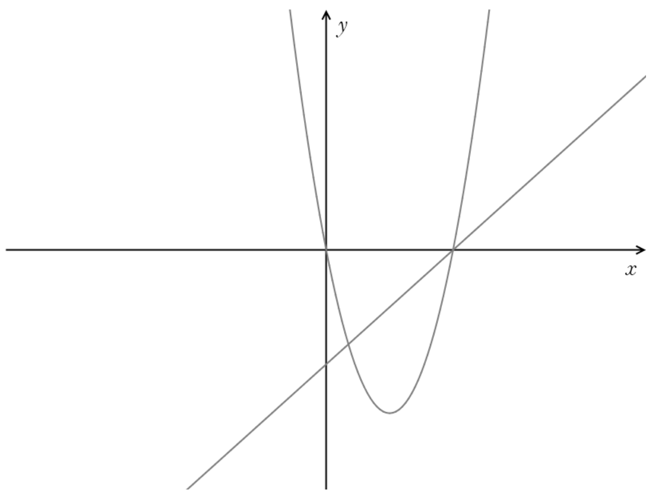

Figura 2: Exemplo de reta e parábola se interceptando no plano.

A visualização de funções como gráficos facilita muito a compreensão intuitiva de conceitos como os apresentados na seção anterior. Por exemplo, considere as imagens abaixos.

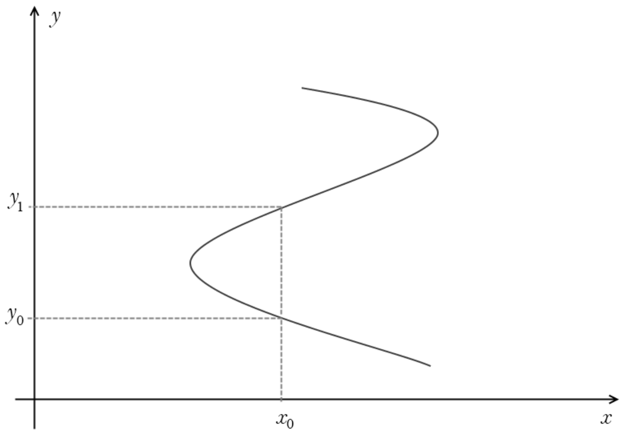

Figura 3:

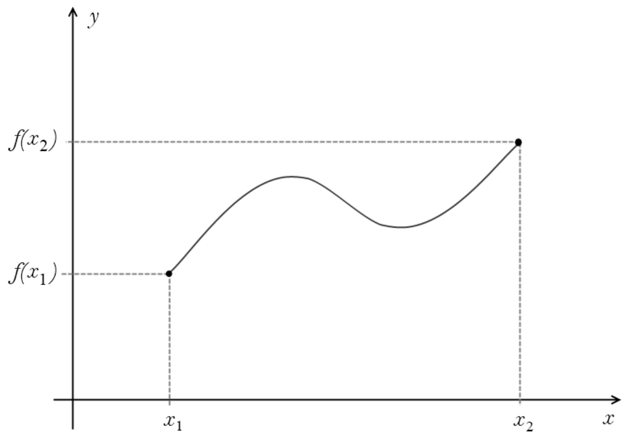

Figura 4:

Observemos a figura 3. Devemos nos perguntar, em primeiro lugar, se esta figura de fato representa o gráfico de uma função. Ao avaliarmos a abscissa x_0, observamos que a ela temos dois pontos relacionados: (x_0, y_0) e (x_0, y_1). Ora, se de fato tivéssemos um gráfico, sabemos que a relação entre x_0 e $f(x_0)$ teria de ser única; segue que a curva da figura 3 não representa uma função.

Isso evidencia uma regra prática, às vezes conhecida como "regra de reta vertical", que nos ajuda a verificar se uma certa curva no plano de fato pode ser o gráfico de uma função: se for possível desenhar uma reta vertical que cruze a curva mais de uma vez, então essa curva claramente não é um gráfico.

A figura 4, por outro lado, passa nesse teste; não é possível achar uma reta vertical que a cruze mais de uma vez, e logo ela é candidata a ser gráfico de alguma função. Notamos que essa curva é limitada entre $x = x_1$ e $x = x_2$, com "bolinhas fechadas" nestes pontos. Significa que o intervalo fechado $[x_1, x_2]$ constitui o próprio domínio da função; e, portanto, vemos que o invervalo $[f(x_1), f(x_2)]$ é a imagem desta função. A partir da representação gráfica, fica imediatamente claro quem são o domínio e a imagem desta função.

Mas podemos, ainda, extrair mais informações a partir da análise gráfica. O gráfico da figura 4 é crescente em seu domínio, indicando que, conforme x cresce, o valor de $f(x)$ também cresce. Essa análise de crescimento (ou decrescimento, ou ambos) de uma função é algo extremamente importante, que será visto mais profundamente, e com métodos algébricos, quando estudarmos derivadas.

Um comentário interessante a ser feito é que, muitas vezes, curvas que não representam funções podem ser divididas em funções e trabalhadas como tal. Considere a figura 6 abaixo, que representa um círculo de raio unitário centrado na origem.

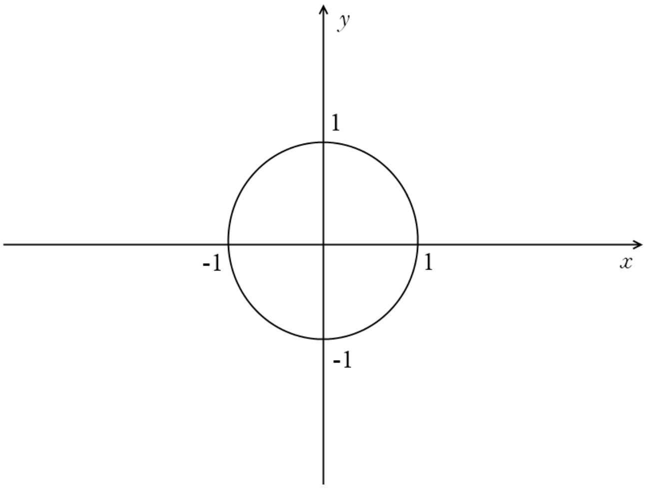

Figura 5: Circunferência unitária no plano.

Do teste da reta vertical, é imediato que a circunferência acima representada não pode ser escrita como uma função. No entanto, se nos lembrarmos do Ensino Médio, vem que a equação da circunferência acima é

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Resolvendo essa equação para y, obtemos duas respostas:

$$y = f_+(x) = \sqrt{1 - x^2};$$

$$y = f_-(x) - \sqrt{1 - x^2}.$$

Essas duas equações definem f_+ e f_- como funções de x; seus gráficos estão desenhados abaixo, e é fácil de se verificar que ambos representam funções.

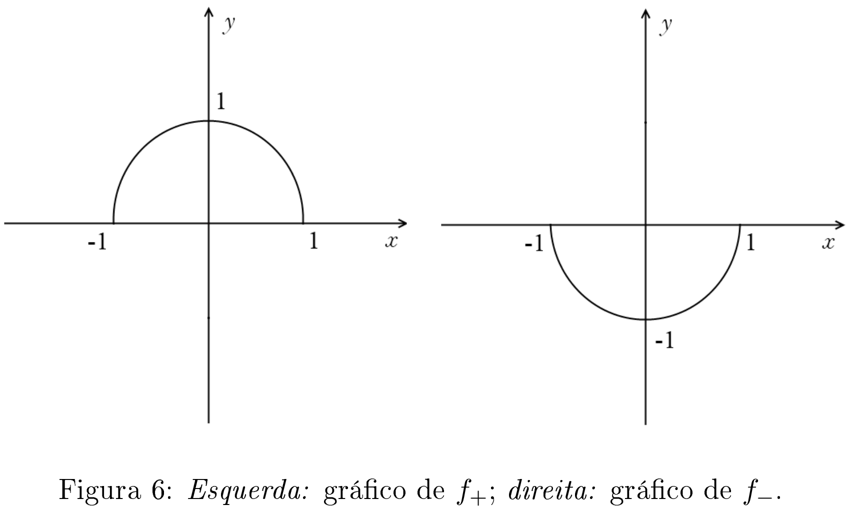

Figura 6: *Esquerda:* gráfico de f_+; *direita:* gráfico de f_-.

Fica portanto claro que, se quisermos trabalhar as propriedades de uma circunferência, precisaremos de duas funções. Porém, a menos desse cuidado a mais de se considerar uma função adicional, podemos trabalhar normalmente com a circunferência tratando-a como feito anteriormente com outras funções. A equação de uma circunferência é o exemplo de uma **relação** - ela de fato relaciona x e y no plano de maneira especial, gerando uma circunferência, mas não pode ser descrita como uma função. Na verdade, ela guarda em si duas **funções implícitas**, que são as dadas para f_+ e f_- acima. Essa noção de função implícita será vista em detalhe posteriormente.

Vejamos um último exemplo desta parte de gráficos. Considere a figura abaixo.

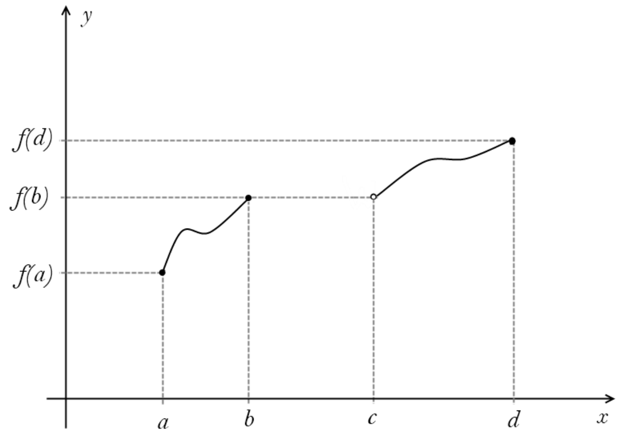

Figura 7:

Temos na figura acima um exemplo de função com domínio "quebrado". Observe que temos

$$\operatorname{Dom} f = [a,b] \cup (c,d].$$

A imagem pode ser dada como

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= [f(a), f(b)] \cup (f(b), f(d)] \\ &= [f(a), f(d)],\end{aligned}$$

de onde vemos que, embora o domínio seja dividido em duas partes, a imagem não o é.

Esse exemplo simples apenas mostra que, independentemente da "cara" da função, uma rápida análise gráfica pode nos dar várias informações importantes.

4 Operações com funções

Como as funções que usaremos são, em última análise, números reais, então temos a liberdade de somá-las, multiplicá-las etc. tal como fazíamos com números reais. A única diferença é que funções, diferentemente de números reais comuns, podem ter domínios diferentes. Por exemplo, suponha que x seja um número real. Então, se f e g forem duas funções, só há sentido escrever algo como

$$f(x) + g(x)$$

se x estiver tanto no domínio de f quanto no de g. Claramente, seja qual for o número x e a função f, só podemos trabalhar $f(x)$ se esta existir.

Portanto, suporemos a partir de agora que as propriedades referentes aos domínios das funções estão satisfeitas em cada caso.

- *Soma (ou subtração):* sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ funções a valores reais, onde A é algum subconjunto de $\mathbb{R}$. Então, sua soma (ou subtração) se define como

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x).$$

- *Produto:* sejam f e g como anteriormente. Então, seu produto se define como

$$(fg)(x) := f(x)g(x).$$

- *Divisão*: sejam f e g como anteriormente. Então, a divisão de f por g (ou a razão de f por g) é dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

  nos pontos em que $g(x) \neq 0$.

As 4 operações fundamentais da aritmética estão portanto definidas para funções. Há, contudo, uma outra operação possível para elas, que não é definida para números reais, que é a *composição de funções*, a saber,

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

Analisemos o significado da expressão acima. No lado direito, vemos f aplicada a $g(x)$; ou seja, dado x, primeiro calculamos $g(x)$, e em seguida aplicamos f a este valor. Por exemplo, sejam f e g definidas por

$$f(x) = 3x + 5; \quad g(x) = 2x - 10.$$

Então, para calcular a composta $f \circ g$ no ponto $x = 2$ fazemos primeiro

$$g(2) = 4 - 10 = -6.$$

Em seguida, aplicamos f a este valor, ou seja

$$f(-6) = -18 + 5 = -13,$$

e portanto

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = -13.$$

Note que poderíamos ter feito a composição de outro modo. Para um ponto x genérico, poderíamos ter escrito

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 3g(x) + 5 \\ &= 3(2x - 10) + 5 \\ &= 6x - 30 + 5 \\ &= 6x - 25, \end{aligned}$$

de modo que

$$f(g(2)) = 12 - 25 = -13.$$

O resultado é o mesmo, como era de se esperar.

O exemplo acima mostra de modo claro como funciona a composição de funções. Note que, geralmente, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, ou seja, *a composição de funções não é uma operação comutativa*[4].

No entanto, embora a composição em si não tenha muita dificuldade em sua execução, nada foi dito sobre o domínio ou contradomínio de f ou g para que a composição exista; somente fizemos as contas e chegamos a um resultado plausível. Para a soma e o produto, a relação entre os domínios era fácil de analisar; o que podemos deduzir para que sua composição seja possível?

Queremos que, dado um certo x, a composição $f(g(x))$ exista. Como a primeira operação a ser feita é calcular $g(x)$, fica evidente que x deve estar no domínio de g. O resultado, $g(x)$, é por definição um valor na imagem de g.

[4] Lembrando que uma operação comutativa é aquela na qual a ordem dos fatores não altera o resultado.

Ora, este valor é que será usado por f para a operação seguinte. Significa que, independente de quanto valha $g(x)$, este valor deve estar no domínio de f; em outras palavras, *a imagem de g deve estar contida no domínio de f*, e escrevemos $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Dom} f$. Portanto, para que uma composição $(f \circ g)(x)$ exista, é necessário que:

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Dom} g \\ \operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Dom} f. \end{cases}$$

O leitor pode então se perguntar: qual é a utilidade da composição de funções? Esta utilidade se tornará clara a medida que o curso se desenvolve, mas de um modo geral, a composição de funções facilita *muito* as operações que serão vistas nos capítulos seguintes. Na verdade, aprenderemos teoremas que nos farão *não precisar* compor funções para poder operar sua composição.

Mas existe um outro ponto interessante sobre a composição de funções, que é a existência de *funções inversas*. Esse tipo de função é extremamente importante no desenvolvimento científico, mas para entendê-lo, antes precisamos estudar outras propriedades de funções.

5 Injetividade e sobrejetividade

Lembremos que, na definição de função, evidenciamos o fato de, para cada x do domínio, corresponde apenas um $f(x)$ na imagem. Isso é uma propriedade geral das funções.

No entanto, não é sempre verdade que, para cada elemento da imagem, corresponde sempre apenas um elemento do domínio. Por exemplo, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 4x^2.$$

Como o domínio da função é real, não é dificil perceber que a imagem desta função corresponde a todos os números reais positivos; em notação,

$$\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}.$$

Segue que o número $y = 4$, por exemplo, é um elemento da imagem. No entanto, vemos que, se aplicarmos os números $x = 1$ e $x = -1$ na função obteremos

$$f(1) = 4(1)^2 = 4;$$

$$f(-1) = 4(-1)^2 = 4,$$

de modo que, para um elemento da imagem, existem dois elementos do domínio correspondentes. Note que isto não fere a definição de função; afinal, $f(1)$ é um valor único, assim como $f(-1)$. Acontece que, neste caso, este valor é assumido por dois elementos do domínio.

Das constatações acima, segue que a função f dada não é *injetora*; definamos a mesma a seguir.

Definição 2. *Uma função $f : A \to B$ é dita* **injetora** *(ou* **injetiva***) se, dado um elemento y da imagem, existe um e apenas um correspondente x no domínio tal que $y = f(x)$.*

Posto de outro modo, podemos definir injetividade como: se $a, b \in A$, então $f(a) = f(b)$ se e somente se $a = b$.

A partir desta definição, vemos porque $f(x) = 4x^2$ definida como acima não é injetora. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Façamos $f(a) = f(b)$. Então

$$4a^2 = 4b^2 \Rightarrow a = \pm b,$$

e como não temos $a = b$, então segue que f não é injetora. Por outro lado, consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = 4x + 3.$$

Façamos o mesmo teste. Se $a, b \in \mathbb{R}$ com $g(a) = g(b)$, temos

$$4a + 3 = 4b + 3 \Rightarrow a = b.$$

Logo g é injetora.

Observe que o domínio onde a função é definida é crucial para determinar se ela é injetora ou não. Analisemos o seguinte exemplo: definamos duas funções como a seguir:

$$f_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^2;$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = x^2.$$

Observamos que a expressão de ambas é a mesma; mudamos apenas o domínio. Essas funções são, a menos de uma constante, idênticas à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2$ estudada anteriormente, que verificamos não ser injetora. Se repetirmos a conta feita para ela para f_2, chegaremos à conclusão de que f_2 também não é injetora. Por outro lado, para f_1, teremos

$$\begin{aligned} f_1(a) = f_1(b) &\Rightarrow a^2 = b^2 \\ &\Rightarrow a = \pm b \\ &\Rightarrow a = b, \end{aligned}$$

já que a função só é definida para valores positivos. Logo, f_1 é injetora. Esse exemplo mostra que duas funções com mesma expressão, mas definidas em domínios diferentes, podem ser diferentes do ponto de vista da injetividade.

Do mesmo modo como o teste da reta vertical ajudava a determinar se uma curva é uma função, existe um teste que nos ajuda a determinar se uma função é injetora. Esse é chamado "teste da reta horizontal", e funciona como a seguir. Se for possível fazer uma reta vertical que cruze a função em mais de um ponto, então a função *não* é injetora. No caso da função $f(x) = x^2$ definida com domínio real, qualquer reta horizontal acima de 0 a cruzará em dois pontos (verifique!).

FIGURA: funcao nao injetora, determinada pelo teste da reta
FIGURA:funcao injetora

Tendo definido a injetividade, passemos ao próximo conceito. Nesse caso, daremos a definição diretamente e depois discutiremos seu significado.

Definição 3. *Uma função $f : A \to B$ é dita* ***sobrejetora*** *(ou* ***sobrejetiva****) se seu contradomínio é igual a sua imagem.*

A definição acima é, até certa medida, autosuficiente. Uma função é sobrejetora quando, dado qualquer elemento do contradomínio, ele também faz parte da imagem da função. Em outras palavras, não "sobra" nenhum elemento do contradomínio, ao contrário do que geralmente costuma acontecer.

Consideremos o exemplo a seguir para facilitar a compreensão. Seja novamente a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2.$$

Como já discutido anteriormente, essa função recebe qualquer valor real, mas retorna apenas valores positivos ou nulos. Ou seja, embora seu contradomínio seja $\mathbb{R}$, sua imagem é $\mathbb{R}_+$; portanto, ela *não* é sobrejetora. Já a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = 2x$$

é sobrejetora, pois sua imagem é evidentemente todos os números reais. Notamos que esta função também é injetora (verifique!).

É evidente que, em muitos casos, podemos tornar uma função sobrejetora ao reduzir seu contradomínio para ser igual a sua imagem. No caso de $f(x) = x^2$ acima, por exemplo, seria suficiente definí-la como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Isso não muda em nada o funcionamento ou a aparência da função, mas a torna sobrejetora.

Entendidos os conceitos de injetividade e sobrejetividade, resta somente o seguinte:

Definição 4. *Uma função $f : A \to B$ é dita* ***bijetora*** *(ou* ***bijetiva****) se ela for injetora e sobrejetora.*

Uma função bijetora também é dita **um-a-um**, ou biunívoca. Isso se deve às seguintes constatações:

1. Para cada elemento do domínio, existe um e apenas um elemento relativo na imagem (porque a função é injetora);

2. Para cada elemento do contradomínio (e portanto da imagem, pois a função é bijetora) existe um elemento relativo do domínio;

3. Segue que existe uma correspondência um-a-um entre cada elemento do domínio e da imagem.

Essa correspondência biunívoca entre domínio e imagem, de certo modo, fornece uma equivalência entre eles; poderíamos pensar que, se $f : X \to Y$ é bijetora, então deve haver uma função $g : Y \to X$ também bijetora, que possa "desfazer" a transformação feita por f. Nesse aspecto, poderíamos pensar em g como sendo uma função "oposta" a f, ou seja, uma operação oposta que mapeie Y em X ao invés do contrário.

Essa função sempre existe, se a função que estivermos trabalhando for bijetora. Na verdade, é com o conceito de bijetividade que podemos definir **função inversa**, que veremos a seguir.

6 Função inversa

Considere o seguinte problema:

Uma partícula tem sua posição x, em metros, dada em função do tempo t, em segundos, com $t \geq 0$, de acordo com a equação

$$x = f(t) = 32 - 2t^2.$$

Determine:

1. *a posição da partícula em $t = 1$ s;*

2. *o instante no qual a posição da partícula é $x = 0$ m.*

O problema acima é um simples exercício de Física de Ensino Médio. Ao invés de resolvê-lo diretamente, procuremos entendê-lo do ponto de vista do que estudamos de funções até agora.

Em primeiro lugar, usemos o plano Cartesiano a nosso favor. Colocando o tempo no eixo das abscissas e a posição no eixo das ordenadas, lembrando que nosso domínio é $t \in [0, \infty)$, e lembrando como desenhar gráficos de funções de segundo grau, podemos desenhar o gráfico da função dada. O resultado pode ser visto na figura abaixo.

FIGURA: grafico de y = 32 - 2x*x, x > 0

Podemos analisar a curva acima pelo teste da reta horizontal e verificar que ela representa uma função injetora (o teste algébrico nos daria o mesmo resultado). Podemos, também, reduzir o contradomínio ao conjunto de todos os reais menores ou iguais a 32, ou seja, definir a função como $x = f(t)$, onde $f : T \to X$, $T = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ e $X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 32\}$. Dessa maneira, a posição do corpo em função do tempo torna-se bijetora .

O exercício 1 pode ser resolvido constatando-se que, como a expressão para x é uma função, então podemos associar, a cada instante de tempo, uma única posição. Assim, para $t = 1$, temos

$$x(1) = f(1) = 32 - 2 \cdot 1^2 = 30\,\mathrm{m}.$$

(note que $x(1)$ é apenas a notação para o elemento de X igual a $f(1)$).

O segundo item é o mais importante, e é o que justifica termos trabalhado a função de modo que ela seja bijetora. Observe que, como existe uma relação um-a-um entre tempo e posição, então, do mesmo modo como no item anterior tínhamos apenas uma posição para cada tempo, *temos também apenas um tempo para cada posição.* Isso fica evidente ao tentarmos isolar t na expressão para x:

$$\begin{aligned} x &= 32 - 2t^2 \\ t^2 &= \frac{32 - x}{2} \\ t = g(x) &= \sqrt{\frac{32 - x}{2}}, \end{aligned}$$

onde apenas a raiz positiva foi utilizada, pois excluem-se valores negativos de t na definição do problema. Observe que, como a função original era bijetora, então não apenas x pode ser escrito como função de t, mas o oposto também. Assim, para $x = 0$, temos um e apenas um t que vale

$$t(0) = g(0) = \sqrt{16} = 4\,\mathrm{s}.$$

Observamos que a função g acima é definida exatamente com domínio e imagem opostos a f; é ela $g : X \to T$[5].

Para encerrar esta análise (não muito relevante à resolução do problema, mas extremamente prática para introduzir o assunto a seguir), analisemos as funções f e g do ponto de vista matemático, esquecendo um pouco sua interpretação física. Usando agora apenas a variável padrão x e definindo os conjuntos

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\};$$

$$I = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 32\},$$

podemos escrever

$$f : D \to I, \qquad f(x) = 32 - 2x^2;$$

$$g : I \to D, \qquad g(x) = \sqrt{\frac{32 - x}{2}}.$$

Experimentemos fazer a composição $f \circ g$:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 32 - 2\left(\frac{32 - x}{2}\right) \\ &= x. \end{aligned}$$

[5]Notamos que, na resolução do problema, "apareceram" duas novas funções: f e g. O estudante poderia se perguntar por que não apenas escrevemos x como $x(t)$ e t como $t(x)$, ao invés de introduzir duas novas funções. Essa notação de fato existe e é utilizada por muitos autores. No entanto, ela não é estritamente formal, na medida em que x e t não são funções, mas sim elementos de X e T, respectivamente. Eles se relacionam a partir, portanto, de funções. No entanto, na maior parte dos casos essa distinção não leva a resultados equivocados. É apenas uma questão de manter o formalismo.

Experimentemos também fazer a composição inversa, $g \circ f$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt{\frac{32 - (32 - 2x^2)}{2}} \\ &= x, \end{aligned}$$

lembrando que somente vale a raiz positiva devido à definição de D.

Temos portanto o fato inesperado de que $f \circ g = g \circ f = x$ no caso especial em que f *(ou g) é bijetora*; o resultado obtido é a função identidade $\mathrm{Id}(x) = x$, que retorna o mesmo argumento recebido. Podemos interpretar esse resultado, para $f \circ g$, por exemplo, como: toda mudança que g exerce em x é desfeita por f em todos os pontos do domínio de g, de maneira que no final do cálculo *as funções se anulam*. A operação oposta é análoga: toda mudança exercida por f é cancelada por g, de modo que novamente *as funções se anulam*. A constatação de todos esses fatos leva-nos naturalmente a querer definir f como a **função inversa** a g, e vice-versa.

Isso quer dizer, se voltarmos ao exemplo do problema físico anterior, que se $x = f(t)$ (i.e. f leva cada elemento do domínio a um elemento da imagem), então, na hipótese de que f seja bijetora, deve existir uma função g tal que $g(x) = t$, ou seja, que leve da imagem de volta ao domínio. Desse modo, a composição de uma pela outra só pode resultar uma identidade. E, para que essa composição seja possível para todos os pontos do domínio e da imagem, é necessário que as transformações sejam sempre reversíveis. É por isso que a função deve ser injetora: se dois elementos distintos levassem a um único elemento, como fazer o caminho oposto? Como escolher a qual dos dois voltar? O mesmo vale para a função ser sobrejetora: se sobram elementos do contradomínio na ida, aonde mapear esses elementos na volta?

Isso nos leva a escrever a seguinte

Definição 5. *Seja $f : A \to B$ uma função. Então, definimos a **função inversa** de f como $f^{-1} : B \to A$, de tal modo que, se $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y = f(x)$, então $x = f^{-1}(y)$.*

(Não confundir o índice $^{-1}$ como um expoente! É apenas uma notação).

Queremos, ainda, que também valha o seguinte

Teorema 1. *Uma função $f : A \to B$ admite uma inversa se e somente se f for bijetora.*

Prova: lembramos que uma afirmação do tipo "se e somente se" exige que demonstremos tanto a ida quanto a volta. Provemos então, em primeiro lugar, que

$$f \text{ admite inversa} \Rightarrow f \text{ é bijetora.}$$

Seja f^{-1} a inversa de f. Queremos provar, em primeiro lugar, que f é injetora. Para tal fim, queremos que, se $a, b \in A$ são tais que $f(a) = f(b)$, então $a = b$.

Ora, como $f(a), f(b) \in B$, que é o domínio de f^{-1}, então podemos aplicá-la a estes dois elementos, de modo que

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(b)) \\ &\Rightarrow a = b, \end{aligned}$$

onde na segunda linha foi usado o fato de que a composição de uma função com sua inversa resulta na identidade. Segue do cálculo acima que f é injetora.

Queremos agora provar que f é sobrejetora. Para tal, queremos provar que qualquer que seja $y \in B$, existe algum $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Ora, se $y \in B$, então podemos aplicar f^{-1} a este número, e por definição temos

$$f^{-1}(y) = x,$$

em que $x \in A$ pela definição de função inversa. Aplicando f aos dois lados da igualdade acima (o que é possível, pois f é definida sobre A e x é um elemento qualquer de A), temos

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) \Rightarrow y = f(x),$$

de modo que f é sobrejetora. Tendo provado que ela é injetora e sobrejetora, segue que f é bijetora e temos a prova da primeira parte.

Queremos agora provar que

$$f \text{ é bijetora} \Rightarrow f \text{ admite inversa.}$$

É necessário então provar que existe alguma função g tal que

$$g(y) = x, \quad \forall y \in B.$$

Definamos portanto uma relação g como acima. Queremos provar que essa relação é, de fato, uma função.

Seja então $y \in B$. Como f é sobrejetora, existe então pelo menos um $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Se este x for único, então define-se $g(y)$ unicamente e, portanto, g será uma função.

Ora, como f é injetora, então x é de fato único. Segue que $g : B \to A$ é uma função que satisfaz $g(y) = x$, e portanto é a função inversa de f. $\square$

A demonstração acima encerra a teoria sobre funções inversas por enquanto. Esperamos que se aceite o fato, sem demonstração, de que a inversa de uma função é, ela também, bijetora.

Exemplo. Seja a função $f : A \to A$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{x-1},$$

onde $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.

1. Prove que f é injetora.
2. Prove que f é sobrejetora.
3. Calcule a inversa de f.

Solução:

1. Para provarmos que f é injetora, precisamos mostrar que, se $a, b \in A$ tais que $f(a) = f(b)$, então $a = b$ (não precisamos demonstrar a recíproca, ou seja, de que se $a = b$, então $f(a) = f(b)$; isto já vem da definição de função).

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{a}{a-1} = \frac{b}{b-1}$$

$$a(b-1) = b(a-1)$$

$$a = b,$$

de onde f é injetora.

2. Para provarmos que f é sobrejetora, precisamos escolher um y qualquer da imagem e mostrar que o conjunto de todos estes valores equivale ao próprio contradomínio. Ou seja, queremos relacionar, para cada y do contradomínio, um x no domínio, a partir de

$$y = f(x).$$

Suponhamos então y na imagem de f, e resolvamos a igualdade acima para y:

$$y = \frac{x}{x-1}$$

$$y(x-1) = x$$
$$yx - y = x$$
$$x = \frac{y}{y-1}.$$

Para qualquer y no contradomínio, isto é, para $y \neq 1$, a expressão acima é definida. Significa que conseguimos associar, a cada y do contradomínio, um respectivo x no domínio; segue que f é sobrejetora.

3. Tendo constatado em (1) que f é injetora e em (2) que ela é sobrejetora, segue que ela é bijetora e, do Teorema 1, podemos concluir que ela admite inversa. O cálculo é feito como no exercício no começo desta seção; que, por sua vez, é idêntico ao do item acima. Verifique que, se escrevermos

$$x = g(y) = \frac{y}{y-1}$$

e fizermos a composição $(f \circ g)(x)$, isto resultará na identidade. Portanto, g é a função inversa procurada, e temos

$$g(y) = \frac{y}{y-1}.$$

Como geralmente escrevemos funções como sendo da variável x, e lembrando a notação f^{-1}, temos a função inversa como sendo $f^{-1} : A \to A$ dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Observe que, em termos práticos, o cálculo utilizado para determinar se uma função é sobrejetora e o utilizado para determinar sua inversa são os mesmos.

Exemplo. Seja a função $f : A \to B$ dada por

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 1,$$

com

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > -1/2\};$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/2\}.$$

1. Prove que f é injetora.
2. Prove que f é sobrejetora.
3. Calcule a inversa de f.

Solução:

Em primeiro lugar, embora não seja necessário, mostremos que a função de fato é injetora e sobrejetora com o domínio e contradomínio indicado. A figura abaixo representa seu gráfico.

FIGURA: y=2x*X + 2x + 1, para x > -1/2 e y > 1/2

A função passa no teste da reta horizontal, e portanto é injetora. Além disso, o seu contradomínio coincide com sua imagem (eixo Oy acima de $y = 1/2$), de modo que ela também é injetora. Provemos agora esses resultados usando a álgebra.

1. A resolução é a mesma do exercício anterior. Façamos dois pontos $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b)$. Queremos provar que isso só vale se $a = b$.

$$\begin{aligned}
f(a) = f(b) \Leftrightarrow 2a^2 + 2a + 1 &= 2b^2 + 2b + 1 \\
a^2 + a &= b^2 + b \\
a^2 - b^2 + a - b &= 0 \\
(a-b)(a+b) + (a-b) &= 0 \\
(a-b)(a+b+1) &= 0.
\end{aligned}$$

Na penúltima linha, usamos a fatoração $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Como temos um produto que resulta nulo temos que $a - b = 0$ ou $a + b + 1 = 0$. No entanto, essa segunda igualdade é impossível, pois tanto a quanto b pertencem a A, e portanto são estritamente maiores que -0.5. Portanto, $a + b$ é estritamente maior que -1, e logo não podemos ter $a + b + 1 = 0$. Segue que $a - b = 0 \Rightarrow a = b$, e logo a função é injetora.

2. Pelos mesmos argumentos do exercício anterior, resolvamos para y a equação

$$y = 2x^2 + 2x + 1.$$

Temos, usando a fórmula de Bhaskara:

$$2x^2 + 2x + 1 - y = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8(1-y)}}{4} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{2y-1}}{2} \\
&= \frac{-1 + \sqrt{2y-1}}{2},
\end{aligned}$$

onde apenas a raiz positiva é válida, uma vez que é a única que, para todos os valores de y do contradomínio, retorna x no domínio correto. Vemos que, para cada y do contradomínio, existe um único x do domínio, de maneira que a função é sobrejetora.

3. Pelo mesmo argumento do exercício anterior, vem que a função inversa é $f^{-1} : B \to A$ dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{-1 + \sqrt{2x-1}}{2}.$$

7 Funções pares e ímpares

Essa seção destina-se somente à menção da existência de dois tipos de função: as pares e ímpares. Essa distinção é muito mais simples do que a feita nas seções anteriores, e quase sem álgebra envolvida; ela só se torna importante quando estudarmos métodos para desenhar gráficos e integração. Portanto, não é preciso lê-la imediatamente; ela será retomada quando necessário.

Os conceitos são simples. Temos a seguinte

Definição 6. *Uma função $f : A \to B$ é dita **par** se*

$$f(x) = f(-x)$$

para todo $x \in A$.

Exemplo. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 3x^4 + 2x^2$$

é par, pois

$$f(-x) = 3(-x)^4 + 2(-x)^2 = 3x^4 + 2x^2 = f(x).$$

Funções pares são úteis porque são *espelhadas em relação ao eixo Oy.* Vejamos abaixo o gráfico da função dada acima, próxima à origem.

FIGURA: grafico de y = 3x4 + 2x2. mostrar que eh par

Podemos ver que o comportamento da função antes e depois da origem, em relação ao eixo Ox, é simétrico. Isso é muito útil quando estudarmos comportamentos de funções em intervalos simétricos, da forma $[-a, a]$. Podemos fazer as contas no intervalo $(0, a]$ e simplesmente "espelhar" os resultados com base no eixo Ox.

É fácil demonstrar que a soma, subtração, produto ou divisão de funções pares também é par.

Definição 7. *Uma função $f : A \to B$ é dita **ímpar** se*

$$f(-x) = -f(x)$$

para todo $x \in A$.

Exemplo. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = -x^3 + 2x$$

é ímpar, pois

$$f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x) = x^3 - 2x = -(-x^3 + 2x) = -f(x).$$

Funções ímpares também possuem seu próprio tipo de simetria, mas dessa vez em relação ao eixo Ox. Observe o comportamento da função acima, próximo da origem.

FIGURA: grafico de y = -x3 + 2x. mostrar que eh impar

Podemos ver que, para valores de x negativos, a função se comporta de modo espelhado aos valores positivos de x. Do mesmo modo que foi explicado para as funções pares, as funções ímpares também nos permitem reduzir pela metade nosso trabalho em alguns casos.

Tal como nas funções pares, a soma ou subtração de funções ímpares também o é. No entanto, é necessário cuidado para trabalhar com seu produto ou divisão. Por exemplo, a função dada por

$$f(x) = g(x)h(x),$$

onde

$$g(x) = x^3, \qquad h(x) = x + x^3$$

é par, embora seja o produto de funções ímpares. O mesmo se aplica a produtos e divisões de funções pares com ímpares.

Claramente, existem funções que não são ímpares nem pares. Um exemplo é a função $f(x) = 3x^2 + x$. No entanto, é interessante constatar o fato dado pela seguinte

Proposição 1. *Seja $f : A \to B$ uma função real. Então, f pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar.*

Prova: seja f uma função qualquer. Então, sempre podemos escrevê-la como

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

(verifique que a expressão acima é verdadeira). Chamando

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2};$$

$$h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

vemos que

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x);$$
$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x),$$

de modo que g é par e h é ímpar. Segue a prova da proposição.

Com base nisso, muitos exercícios que virão a seguir podem ser resolvidos com muito menos dificuldade. Funções grandes podem ser divididas em pedaços pares e ímpares que são muito mais fáceis de se manipular.

Um exemplo do que pode vir a seguir:

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + x^3.$$

Calcule a "área" entre a curva e o eixo Ox no intervalo $[-1, 1]$. Por "área", queremos dizer a área geométrica, dotada de um sinal; para funções abaixo do eixo Ox, a área é negativa; para funções acima do eixo, a área é positiva.

Solução:
Observe que a área a ser calculada é a marcada no gráfico de f entre $[-1, 1]$, que tem a forma
FIGURA: grafico de y = 1 + x*x*x, entre -1 e 1. marcar a integral

Não sabemos calcular essa área diretamente, ainda. Se a função fosse redutível a triângulos ou outros polígonos, poderíamos usar nosso conhecimento de geometria e calcular a área (no capítulo sobre integração, aprenderemos a calcular essa área por meios algébricos).

No entanto, podemos perceber que a função é formada por um pedaço ímpar, x^3, e um pedaço par, 1. Observemos os gráficos de cada uma dessas funções:
FIGURA: y = x*x*x, entre -1 e 1
FIGURA: y = 1, entre -1 e 1

Das figuras acima, fica claro que a área de x^3 no intervalo simétrico $[-1, 1]$ é nula; não importa o quanto valha esta área em $[-1, 0]$, este valor é o mesmo, em módulo, que o da área entre $[0, 1]$, mas com sinal oposto; sua soma, portanto, se cancela, e temos área nula.

Por outro lado, a função constante igual a 1 nos fornece um retângulo de base 2 e altura 1; segue que sua área é base $\times$ altura $= 2$.

A área de f é, portanto, a soma das áreas das duas funções que as somam; portanto,

$$\text{Área}(x^3 + 1) = \text{Área}(x^3) + \text{Área}(1) = 0 + 2 = 2.$$

A área total é portanto igual a 2. Conseguimos chegar a este resultado sem nenhum outro conhecimento sobre Cálculo[6].

8 Funções importantes

Com base em tudo o que foi dito até agora, o leitor já tem uma base forte na teoria de funções. No entanto, como deve ter sido percebido, até agora somente trabalhamos com funções polinomiais, ou com razões de polinômios. Essa seção tem como objetivo introduzir algumas das funções mais usadas do Cálculo, e sua "aparência" geral. Por "aparência", queremos dizer a forma geral com que o gráfico dos vários tipos de funções se comportam - isto é, se eles cortam os eixos em pontos específicos, se são crescentes ou decrescentes, etc. Isto não pode ser tomado como teoria rigorosa; é apenas um preparo para os capítulos posteriores.

Essa seção, historicamente, pode ser amedrontadora para vários estudantes. Isso decorre do fato de que nela aparecem gráficos de funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas etc., cujas propriedades e manipulação, muitas vezes, já foram esquecidas pelo estudante. Contudo, pedimos paciência. Essas funções, e as propriedades de cada uma, serão revistas gradualmente.

Como comentário final, muitas propriedades dessas funções só se tornam mais aparentes quando pudemos estudar suas propriedades do ponto de vista de derivadas e integrais. Assim, o que pode ser dito agora é extremamente raso; as veremos mais detalhadamente nos capítulos posteriores.

1. **Funções polinomiais:** um *polinômio* $P_n(x)$ *de grau* n é uma expressão da forma
$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$
onde n é um número natural e cada um dos coeficientes $a_k,\ k = 0, 1, 2 \ldots n$ são reais. Em notação mais simplificada,
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$
Uma função polinomial nada mais é que um polinômio sendo avaliado como uma função.
Alguns comentários relevantes:
   - Polinômios têm, por convenção, potências naturais de x. Portanto, expressões como
   $$p_1(x) = 3x^2 + \frac{4}{x};$$
   $$p_2(x) = x^2 + x^{3/2}$$
   não são polinômios. No entanto, é um fato que as duas funções acima "funcionam" como polinômios em muitos casos, especialmente no que se refere a integração e derivação. Assim, por vezes podemos chamá-las de polinômios, embora tecnicamente não sejam.
   - Se $P(x)$ é um polinômio, dizemos que α é uma **raíz** de $P(x)$ se $P(\alpha) = 0$.
   - Polinômios da forma
   $$P(x) = C,$$
   em que C é uma constante, têm grau 0, uma vez que $C = Cx^0$. Isso só não é verdade para $C = 0$, pois o polinômio $P(x) = 0$ (conhecido como **polinômio identicamente nulo**) não tem grau definido (já que $0 = 0x^5, x^{100}$, etc.).

[6] O leitor mais atento terá notado que fizemos a suposição de que a "operação" $\text{Área}(f(x))$ seja linear, ou seja, que
$$\text{Área}(f(x) + g(x)) = \text{Área}(f(x)) + \text{Área}(g(x)).$$
Esta suposição, embora intuitiva, não foi demonstrada. Ela decorre da linearidade da operação de tomar limites, como será visto mais para frente.

- Polinômios são funções especiais, na medida em que sua *divisão* é definida. Essa operação pode ser encontrada nos apêndices (**FAZERAPENDICESOBREISSO**), e será muito utilizada ao estudarmos integração.
- O *teorema fundamental da álgebra*, cuja demonstração foge ao escopo deste texto, garante que *qualquer polinômio de grau n possui n raízes complexas*[7]. Portanto, podemos escrever um polinômio da forma

  $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

  como

  $$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n),$$

  em que cada um dos $\alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ é uma raiz (real ou complexa) do polinômio. Um modo mais compacto de escrever a expressão acima é

  $$P(x) = a_n \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k),$$

  em que o símbolo $\prod$ é o **produtório**. Seu funcionamento é idêntico ao do somatório, com a única diferença, bastante evidente, que ele multiplica os termos, ao invés de somá-los.
- Polinômios têm como domínio máximo possível os números reais. Isso é evidente, pois não existe nenhum x real tal que ele não possa ser multiplicado por um coeficiente constante ou elevado a uma potência natural. Assim, o gráfico de uma função polinomial pode ser feito em qualquer intervalo em $(-\infty, \infty)$. Além disso, funções polinomiais são sempre contínuas e diferenciáveis. Estes conceitos serão vistos nas seções posteriores, mas simplificadamente, querem dizer que elas não tem “pontas” (são sempre suaves) e que não saltam de um valor para o outro. De outro modo, esses conceitos querem dizer que podemos desenhar estes gráficos suavemente, sem tirar o lápis do papel.

Os gráficos de polinômios podem ter aparências extremamente variadas, a depender do número de termos que aparecem; contudo, existe uma distinção clara entre polinômios de grau par e grau ímpar. Observe os gráficos dos polinômios de grau 2, 4 e 8, respectivamente, desenhados abaixo (note que estamos apenas indicado o grau dos polinômios, sem nos importar com os outros termos). Estes polinômios têm coeficiente positivo junto ao x de maior grau. Ou seja, o de grau 2 é da forma $P(x) = ax^2 + \cdots$, onde $a > 0$. O mesmo vale para todos os outros.

FIGURAS: graficos de polinomios de grau 2, 4 e 8 quaisquer, com coeficiente dominante positivo.

Para efeitos de comparação, os gráficos abaixo são de polinômios de grau 1, 3 e 7, novamente com coeficiente positivo.

[7] A formulação mais correta é: seja um polinômio não constante, de coeficientes complexos, a uma variável. Então, ele possui pelo menos uma raíz complexa. Embora ambas as formulações possam parecer distintas, são equivalentes na medida em que, se α é raíz de um polinômio $P_n(x)$, então podemos escrever

$$P_n(x) = (x - \alpha)P_{n-1}(x),$$

para algum outro polinômio $P_{n-1}(x)$, um grau abaixo. A afirmação do teorema pode ser aplicada a este novo polinômio, e iterativamente, até chegarmos a grau 0, ou seja, no caso em que o polinômio é uma constante, e portanto deixa de valer o teorema.

FIGURAS: graficos de polinomios de grau 1, 3 e 7 quaisquer, com coeficiente dominante positivo.

Observe que os polinômios de grau par *sempre* se parecem com uma "parábola distorcida". Ou seja, é um gráfico em forma de $\cup$ com ondulações no meio (talvez a única excessão seja o polinômio de grau par $P(x)$ = constante, que é uma reta horizontal. No entanto, ele pode ser pensado com um $\cup$ esticado ao máximo). Já os polinômios de grau ímpar sempre se parecem com "retas distorcidas", ou seja, uma linha como uma barra, /, com ondulações.

Se o sinal do coeficiente do termo de grau maior fosse negativo, os gráficos seriam como os seguintes:

FIGURAS: mesmos graficos de graus 2, 4, 8, 1, 3 e 7 acima, trocando o sinal do coeficiente de maior grau.

Observe os gráficos de grau par agora parecem com um $\cap$, embora as ondulações se mantenham. Já os de grau ímpar, que antes subiam, agora descem, na forma de um $\backslash$, também mantendo as ondulações.

Um comentário relevante, que exige um pouco do conhecimento da teoria dos polinômios, é o seguinte: todo polinômio de grau ímpar admite uma, e pelo menos uma, raíz real, ao passo que polinômios de grau par podem ou não ter raizes reais. Isso se deve ao seguinte fato: seja α um número complexo. Então, para certos $a, b \in \mathbb{R}$, vale

$$\alpha = a + bi,$$

em que $i^2 = -1$ é a unidade imaginária. Existe um teorema que diz que, se α é raiz de um polinômio (com coeficientes reais), então seu conjugado[8]

$$\alpha^* = a - bi$$

também é raíz deste polinômio[9]. Isso tem um significado profundo. Suponha que, para um polinômio de terceiro grau, $P_3(x)$, tivéssemos encontrado uma raíz complexa α_1. Isso significa que $\alpha_2 = \alpha_1^*$ também tem de ser uma raiz de $P_3(x)$. Se existisse mais uma raiz complexa α_3, então ela implicaria a existência de uma quarta raiz $\alpha_4 = \alpha_3^*$. Contudo, como

[8]Também denotado $\bar{\alpha}$

[9]Uma demonstração simples, que exige um mínimo de conhecimento de álgebra complexa, pode ser vista abaixo. Denotaremos $\sum_{k=0}^{n}$ simplesmente por $\sum_k$, para manter a notação mais simples.

Seja α a raíz de um polinômio $P(x) = \sum_k a_k x^k$, para coeficientes a_k reais. Portanto,

$$P(\alpha) = \sum_k a_k \alpha^k = 0.$$

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos, e a_1, a_2 dois números reais. Valem então as propriedades

$$(a_1 z_1 + a_2 z_2)^* = a_1 z_1^* + a_2 z_2^*;$$

$$(z_1^{a_1})^* = (z_1^*)^{a_1};$$

$$a_1^* = a_1.$$

É verdade portanto que

$$\left(\sum_k a_k \alpha^k\right)^* = \sum_k a_k (\alpha^*)^k.$$

Por outro lado, $(\sum_k a_k \alpha^k)^* = 0^* = 0$. Segue que

$$\sum_k a_k (\alpha^*)^k = 0,$$

e logo α^* também é raiz de $P(x)$.

o polinômio é de grau 3, não pode haver mais que 3 raízes. Segue que pelo menos uma das raízes tem de ser real.

Se, por outro lado, tivéssemos encontrado uma raíz real, a próxima teria de ser complexa e, como seu conjugado também seria raiz, novamente teríamos o máximo de 3 raízes, das quais uma é real. Portanto, chegamos novamente à mesma conclusão.

Generalizando esse pensamento para potências ímpares mais altas, temos que todo gráfico de um polinômio de grau ímpar, obrigatoriamente, cruza o eixo x em algum instante (isto é, existe algum valor de x para o qual o polinômio é nulo). O mesmo já não vale para polinômios de graus pares - num polinômio de segundo grau, por exemplo, encontrar uma raiz complexa equivale a encontrar seu conjugado também, de modo que já temos duas raízes não reais.

2. **Funções exponenciais:** são funções da forma

$$f(x) = a^x,$$

para algum $a \in \mathbb{R}$ positivo. Observe que a variável se encontra no expoente, diferentemente do que acontecia nos polinômios, em que a variável se encontrava na base. Além disso, observe que restringimos a aos números positivos. O leitor poderia se perguntar: por que não expandimos esse domínio às bases negativas também? Para responder de modo simples, imagine que tivéssemos

$$f(x) = (-3)^x.$$

Para x ímpar, a função assumiria valores negativos; já para x par, ela assumiria valores positivos. Para valores racionais intermediários, por exemplo $3/2$, teríamos

$$f(3/2) = (-3)^{3/2} = \sqrt{(-3)^3} = \sqrt{-27},$$

que não existe. Portanto, diferente dos polinômios, não conseguiríamos desenhar o gráfico desta função "sem tirar o lápis do papel". Ela oscilaria rapidamente entre valores positivos e negativos, e não seria definida para uma infinidade de pontos. Contudo, se desejássemos, poderíamos sem problema definir essa função patológica. É apenas conveniente usar uma função "bem-comportada", pois ela servirá para representar os fenômenos relevantes para nós.

Observe que a função exponencial é definida para todos os números reais. O gráfico de uma exponencial, para base *maior que 1*, é como a seguir:

FIGURA: grafico de exponencial crescente

Já para uma base *entre 0 e 1*, temos um gráfico espelhado em relação ao eixo Oy:

FIGURA: grafico de exponencial decrescente

Obviamente, para base unitária, o gráfico é simplesmente uma reta horizontal. Além disso, para qualquer que seja a a base, a função exponencial intercepta o eixo vertical das ordenadas em $y = 1$ (por quê?).

Notamos que essa diferenciação entre valores maiores ou menores que 1 provém do fato de números menores que 1, ao serem elevados a potências cada vez maiores, diminuem; já os maiores que 1 tendem a aumentar. O modo como a função é espelhada pode ser explicado pelo seguinte exemplo: consideremos a função $f(x) = 2^x$, e a função $g(x) = (1/2)^x$, ambas com domínio real. Podemos expressar g como

$$g(x) = (2^{-1})^x = 2^{-x},$$

que é a própria f, com o sinal dos x invertidos. Desse modo $g(-x) = f(x)$, e portanto, elas são espelhadas pelo eixo das ordenadas.

Algumas propriedades:

- A função exponencial é sempre contínua e diferenciável, ou seja, suave e pode ser desenhada continuamente, sem pulos;
- A exponencial crescente cresce muito mais rápido do que qualquer polinomial - usaremos essa propriedade em breve ao trabalharmos com limites;
- Muitos livros, ao se referirem a *função exponencial*, o fazem referindo-se à função

$$\exp(x) := e^x,$$

onde o número $e = 2,718281\ldots$ é o **número de Euler**[10], que será usado abundantemente daqui para frente. Estudaremos exaustivamente as propriedades dessa função em breve.

3. **Função logaritmica:** é aqui que muitos estudantes decidem parar de estudar Cálculo e ir fazer qualquer outra coisa. A função logaritmica é temida porque usa todas as propriedades de logaritmos, que metade dos aprovados no vestibular já esqueceu. Existe um apêndice dedicado às propriedades desta função, e cuja leitura é altamente recomendada (**FAZERUMAPENDICESOBREISSO**). Definimos a função logaritmica como

$$f(x) = \log_a(x),$$

onde a e x seguem as propriedades usuais do logaritmo, isto é, que $x > 0$ e $a > 0$,$a \neq 1$. O porquê dessas restrições está explicado no apêndice.

Independentemente de qual seja sua base, a função logaritmica sempre intercepta o eixo horizontal das abscissas em $x = 1$; o motivo é o mesmo pelo qual a função exponencial intercepta o eixo vertical em $y = 1$.

- A função logaritmica é a inversa da exponencial. Isso pode ser verificado facilmente escrevendo $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a(x)$ para algum $a > 0$, e fazendo sua composição. Observe que a restrição $a > 0$ é a mesma para ambas as funções.

$$f(g(x)) = a^{\log_a(x)} \equiv x;$$
$$g(f(x)) = \log_a(a^x) \equiv x.$$

Em ambos os casos foram usadas propriedades dos logaritmos. Observe que sua composição é comutativa e resulta na função identidade, de maneira que ambas são inversas.

- A função logaritma tem, para $a > 1$, um gráfico como o a seguir.
FIGURA: grafico de log normal

Observe que a função é crescente em todo o intervalo $(0, \infty)$. Para x próximo de 0 ela se aproxima de menos infinito, e cresce vagarosamente para infinito conforme x vai para infinito (isso será demonstrado posteriormente). Na verdade, é interessante ressaltar que a função logaritmica cresce mais devagar que qualquer função polinomial.

Já para $0 < a < 1$, a função adquire uma forma espelhada:
FIGURA: grafico de log com base pequena

O motivo desse "espelhamento" é o mesmo do que espelha a função exponencial ao redor do eixo Oy.

[10] Pronuncia-se 'Óiler'.

- Do mesmo modo como geralmente considera-se a função exponencial apenas na base e, a função logaritmica, para alguns autores, tem esse nome apenas quando sua base é e. A chamamos de *logaritmo natural* ou *logaritmo neperiano*, que muitas vezes é denotada por
$$\ln(x) := \log_e(x).$$
- Quando aparece simplesmente a notação $\log(x)$, sem a base explícita, isso pode ser interpretado de várias maneiras, geralmente evidentes pelo contexto. Alguns autores usam essa notação para base 2, outros para base 10; alguns livros também usam essa notação para o logaritmo natural. Ela também aparece bastante em demonstrações de propriedades de logaritmos, o que independe da base usada, e portanto ela é omitida.